LICENCIATURA EM MATEMÁTICA APLICADA À ECONOMIA E À GESTÃO

# ÁLGEBRA LINEAR

DATA: 9 / Janeiro / 2018 Duração: 2 horas

**Apresente todos os cálculos e justifique detalhadamente todas as respostas**

(25) **1.** Mostre que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & 2\alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & 2\alpha_2 & \cdots & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n & \alpha_n & \cdots & 2\alpha_n \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

**2.** Considere as seguintes afirmações:

(20) **(a)** Se $S_1 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, $S_2 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3)$ e $S_3 = (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ são sequências de vetores de $\mathbb{R}^n$ linearmente independentes, então a sequência $S_4 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ é também linearmente independente.

(20) **(b)** Se uma matriz invertível tem os mesmos valores próprios que a sua inversa então os seus valores próprios pertencem todos ao conjunto {-1, 1}.

Para cada uma, investigue se é verdadeira ou falsa. Faça uma prova sucinta ou apresente um contraexemplo para justificar cada resposta.

**3.** Considere a matriz $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 & 3 \\ -3 & 3 & 12 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$.

(25) **(a)** Defina nulidade de uma matriz e apresente a nulidade de M.

**(b)** Considere a matriz A que resulta de M eliminando a primeira coluna.

(30) **(b1)** Calcule os valores próprios de A e as suas multiplicidades geométricas.

(20) **(b2)** Classifique a forma quadrática $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathrm{A}\mathbf{x}$.

(30) **4.** Defina imagem de uma aplicação linear e apresente uma base da imagem da aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow P_4(x)$, definida por $f(a, b) = 3\,a\,x^4 - (2\,a - b)\,x^2 + 4\,a - 5\,b$, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(30) **5.** Admita que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ e que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são dois vetores próprios de $A$ associados a valores próprios distintos. O que pode concluir sobre a dependência ou independência linear dos vetores $\mathbf{x} = A\mathbf{u}$ e $\mathbf{y} = A\mathbf{v}$? Porquê?